Alberto Daunisi

L'ULTIMO TEOREMA DI FERMAT

STORIA MATEMATICA
E DIMOSTRAZIONE DI WILES

BOOK SPRINT EDIZIONI

www.booksprintedizioni.it

PREFAZIONE

Le ragioni che mi hanno spinto a scrivere questo libro sono quattro.
La prima è l'incompletezza storico-matematica, per grado e per natura, di tutti gli scritti che riguardano l'Ultimo Teorema di Fermat.
Chiarisco meglio il concetto.
Negli ultimi tre secoli e mezzo l'Ultimo Teorema di Fermat è stato oggetto di profonde analisi da parte dei più eminenti studiosi di tutto il mondo. Alcuni, soprattutto nell'ottocento, hanno scritto corposi volumi sulle varie dimostrazioni specifiche fornite dai loro colleghi nel corso dei secoli e sulle nuove teorie matematiche sorte dal tentativo di dimostrarne la validità generale.
Si tratta però di opere ad altissimo contenuto matematico, rivolte più che altro a un numero ristretto di specialisti, gli unici in grado di capirne la vasta complessità.
L'opera più completa a questo riguardo è *Fermat's Last Theorem* di Harold M. Edwards (citata in bibliografia), un trattato di altissima matematica, dedicato per buona metà alla teoria degli interi ciclotomici di Kummer e per l'altra metà alle forme quadratiche di Gauss e al numero di classi di Dirichlet.
Opere di questo tipo, e di tante altre simili, hanno il pregio di essere degli eccellenti trattati di profonde teorie matematiche, ma presentano tre svantaggi: sono solo accessibili, per la loro complessità, a un numero ristretto di specialisti; non descrivono con la dovuta intensità le azioni, le idee, gli uomini e gli scenari che hanno marcato la storia dell'Ultimo Teorema di Fermat; non raccontano, fino alle recenti scoperte dei nostri giorni, l'intero sviluppo matematico della congettura fermatiana (si fermano infatti a fine ottocento). In sintesi, non tengono conto degli importanti lavori matematici del novecento, che vedono sferrare il decisivo attacco all'Ultimo Teorema di Fermat con l'arma della geometria algebrica, delle curve ellittiche e delle curve modulari.
Quindi, dal mio punto di vista, queste opere peccano di incompletezza storico-matematica. Lo stesso discorso vale, per motivi opposti, per i più recenti scritti sull'Ultimo Teorema di Fermat, dopo che Andrew Wiles ne ha dimostrato (indirettamente) la validità generale.
Le più eminenti opere a questo riguardo sono *L'enigma di Fermat* di Amir D. Aczel e *L'Ultimo Teorema di Fermat* di Simon Singh (citate entrambe in bibliografia). Queste, pur fornendo in misura diversa un

sufficiente quadro storico dell'intera parabola fermatiana, non si soffermano più di tanto sullo studio delle radici matematiche dell'Ultimo Teorema (da Diofanto alla teoria dei numeri), sui penetranti risvolti matematici delle varie dimostrazioni succedutesi nei secoli e sull'analisi delle nuove teorie geometriche e topologiche che hanno portato alla soluzione (ancorché indiretta) dell'enigma fermatiano.

Così, anche queste opere, rispettabilissime sotto il profilo storico e qualitativo, risultano, dal mio punto di vista, incomplete, perché non aggregano alla chiara esposizione storica quel profondo esame matematico che le nuove e complesse teorie topologiche richiedono.

Partendo da queste riflessioni, ho concepito la mia opera seguendo due tracciati ben distinti, ma organicamente intrecciati: uno storico, dove racconto, dall'alba della civiltà fino ai nostri giorni, gli eventi, gli uomini, le passioni e le idee che hanno contrassegnato l'origine e lo sviluppo dell'Ultimo Teorema di Fermat; l'altro, squisitamente matematico, dove, abbracciando circa venticinque secoli di studi matematici, racconto in dettaglio la genesi e lo sviluppo di tutte le teorie matematiche, dall'antichità fino ad Andrew Wiles, che hanno portato alla soluzione (ancorché indiretta) dell'Ultimo Teorema di Fermat.

La seconda ragione di cui parlavo all'inizio è, per così dire, di natura estetica.

Cercavo da molto tempo una formula matematica la cui bellezza fosse proporzionale all'intensità delle idee in essa contenute, con l'ovvio proposito di descriverne gli arcani misteri in un apposito libro.

Una di queste formule poteva essere, per esempio, la relazione di Einstein $E = mc^2$, che lega mirabilmente l'energia di una massa puntiforme alla velocità della luce; un'altra formula poteva essere quella di Eulero $e^{i\pi} = -1$ (da lui stesso definita "*la più bella*"), che lega suggestivamente tra di loro i quattro numeri celebri della matematica, e così via.

Dopo un'attenta analisi, sono arrivato alla conclusione che la relazione di Fermat $x^n + y^n \neq z^n$ le supera ampiamente tutte in bellezza e in potenza di sintesi, perché in un semplice trinomio è racchiusa tutta la storia della matematica, da Pitagora a Poincarè, passando per Diofanto, Eulero, Lagrange, Gauss, Cauchy, Liouville, Galois, Dedekind e tanti altri, e perché abbraccia, in ampiezza e in profondità, i campi più

diversi della matematica (algebra, analisi, geometria e topologia), fino a toccare le aree più avanzate della geometria algebrica.
Contemplando la formula di Fermat, si rivivono, in una successione cronologica di eventi, le scoperte e il legami dell'intero edificio matematico.
Pertanto, ho dedicato la più scrupolosa attenzione allo studio e alla trattazione dettagliata di tutte le scoperte che, nel corso del tempo, hanno svelato, uno a uno, tutti i misteri racchiusi in quella semplice formula.
La terza ragione è di natura squisitamente matematica.
L'Ultimo Teorema di Fermat nasce e si sviluppa all'interno della teoria dei numeri, ossia di quella branca della matematica che taluni chiamano aritmetica superiore, la cui peculiarità è la grande difficoltà che si incontra nel dimostrare teoremi ritenuti suppostamente semplici per l'immediata evidenza numerica delle loro formule. "*È proprio questo fatto*", afferma Gauss, "*che dà all'aritmetica superiore quel magico fascino che l'ha resa la scienza preferita dai più grandi matematici, per non parlare della sua ricchezza inesauribile, dove supera di gran lunga altre parti della matematica*".
Raccontare la storia matematica dell'Ultimo Teorema di Fermat mi ha permesso di raccontare la storia e la genesi di tutte le dottrine che costituiscono il fondamento stesso della teoria dei numeri, una disciplina che, per non trovare dirette applicazioni nelle altre scienze, ha sempre avuto pochi (ma grandi) sostenitori: Fermat, Eulero, Lagrange e Legrendre, come precursori, Gauss, Galois, Dedekind e Riemann, come grandi fondatori della moderna teoria dei numeri.
Per questo motivo ho profuso così tanta passione ed energia nell'organica esposizione dei teoremi e delle scoperte che hanno fatto la storia della intera teoria dei numeri, dall'antichità fino ai nostri giorni, sperando in questo modo che, almeno per qualcuno dei lettori, l'itinerario tracciato in questo libro possa costituire una sorta di naturale iniziazione a questa disciplina che ha il privilegio di nascondere ancora molti segreti nelle trite verità della sua evidenza numerica.
La quarta ragione è legata al controverso sviluppo delle azioni che hanno portato, nel 1994, alla dimostrazione indiretta (ma molto indiretta) dell'Ultimo Teorema di Fermat da parte di Andrew Wiles. In effetti, quest'ultimo ha avuto il grande merito di dimostrare, con tecniche molto complesse e accessibili a pochi matematici, la

congettura di Shimura-Taniyama, secondo cui ogni curva ellittica è anche modulare, che, presa e analizzata a sé stante, non ha niente a che fare con l'Ultimo Teorema di Fermat. L'idea geniale di scoprire, nel 1984, che l'equazione di Fermat poteva essere rappresentata da una particolare curva ellittica fu di Gerhard Frey, come anche sua fu l'intuizione congetturale che "quella" particolare curva ellittica non poteva essere modulare. Fu poi Kenneth A. Ribet, nel 1986, a dimostrare inconfutabilmente che la curva ellittica di Frey, nata dall'ipotesi (supposta assurda) di ammettere soluzioni intere per l'equazione di Fermat, non era affatto modulare. A questo punto, concludevano Frey e Ribet, se qualcuno avesse dimostrato la veridicità della congettura di Shimura-Taniyama, ossia che tutte le curve ellittiche sono modulari, avrebbe secondariamente dimostrato che la curva ellittica di Frey (non modulare) è falsa; in questo caso non possono esistere soluzioni intere per l'equazione di Fermat, pertanto l'Ultimo Teorema di Fermat sarebbe stato confermato vero. Questo, ripeto, lo pensavano e lo dicevano Gherard Frey e Kenneth Ribet nel 1986.

A ben vedere, quindi, si può essere certi che la dimostrazione della congettura di Shimura-Taniyama ha semplicemente confermato come falsa la congettura di Frey, la cui tesi, col supporto del teorema di Ribet, porta alla conclusione che l'Ultimo Teorema di Fermat è vero.

D'altro canto, non sono il solo a sottolineare la natura complessa e molto indiretta della soluzione di Andrew Wiles. Molti altri studiosi (tra cui Amir A. Aczel e Simon Singh) hanno spesso evidenziato la complessità delle strutture di Wiles e l'indiretta dimostrazione scaturita dai suoi procedimenti. Il professor Piergiorgio Odifreddi poi è il più esplicito: «*Alla dimostrazione del Teorema di Fermat per tutti gli esponenti maggiori di 2 si arrivò ancora una volta per una strada molto indiretta, attraverso la cosiddetta congettura di Taniyama*».

Per questa ragione ho voluto ripercorrere, con pari intensità storica e matematica, tutte le tappe che hanno portato alla dimostrazione, ancorché indiretta, dell'Ultimo Teorema di Fermat, non solo per rendere onore ai tanti studiosi che hanno contribuito a svelarne, passo dopo passo, tutti i misteri, ma anche per stimolare nel lettore il fascino e la speranza che una sua dimostrazione diretta, semplice e brillante, possa ancora esistere e aspetta semplicemente di essere scoperta.

In altre parole, raccontando e rimarcando la natura indiretta della dimostrazione di Andrew Wiles, non ho voluto sminuire la sua ingegnosità e il suo merito, che sono stati grandissimi e impareggiabili,

ma semplicemente stimolare il lettore a una più intensa ricerca di una dimostrazione più semplice (e diretta) in modo che quella "dimostrazione veramente meravigliosa" che Fermat diceva di possedere possa un giorno essere svelata.
Le quattro ragioni sopra esposte, messe organicamente insieme, hanno costituito il giusto propellente e il tracciato direzionale di tutti gli argomenti contenuti in questo libro.
Esiste infine un'ultima ragione, per così dire, di complemento, ma forse la più importante per l'alto monito che essa può diffondere alle generazioni di oggi e di domani. Raccontare la storia matematica dell'Ultimo Teorema di Fermat, dalle origini nell'antica Grecia fino alle scoperte di Andrew Wiles, mi ha permesso di raccontare la storia di molti uomini che, separati dal tempo e dallo spazio, hanno contribuito, tutti insieme, alla soluzione di un enigma secolare. Parlo di uomini che hanno vissuto negli angoli più remoti della terra, divisi da lingue, idee, culture e religioni diverse, che hanno cercato di aiutarsi, pur non conoscendosi, gli uni con gli altri, anche nel corso di generazioni successive, trasmettendosi informazioni e migliorando le idee dei loro predecessori. Li ha uniti solo il grande amore per la matematica, oltre al desiderio di contribuire, tutti insieme, alla riuscita di una singola impresa che sembrava impossibile.
Non ho dubbi che l'intera umanità debba trarre esempio da questo sublime atto di fede che solo la matematica, fra tutte le scienze, è in grado di fornire.

L'Autore

Bologna, dicembre 2013

<u>RIFLESSIONI PER IL LETTORE</u>

«*Il grande libro della natura può essere letto solo da coloro che conoscono il linguaggio in cui fu scritto. E questo linguaggio è la matematica. I caratteri sono triangoli, cerchi e altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile intendere umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto*».

Galileo Galilei (1564-1642)

«*Chi mette in dubbio la suprema certezza della matematica si nutre di confusione e non potrà mai mettere a tacere le contraddizioni delle scienze sofistiche che conducono ad eterni schiamazzi ... perché nessuna ricerca umana può essere chiamata scienza se non persegue la sua meta mediante l'esposizione e la dimostrazione matematica*».

Leonardo da Vinci (1452-1519)

DEDICA SPECIALE

A mia moglie Luciana e
a mia figlia Carolina.